



Analisis Kestabilan Sistem Kendali Berbasis Metode *Root-Locus* melalui Aproksimasi Padé untuk Sistem dengan *Time Delay*

Bima Sakti^{1*}, Kiki Amalia²

^{1,2}Politeknik Pratama Mulia, Surakarta, Indonesia

Alamat: Jl. Haryo Panular No.18A, Panularan, Kec. Laweyan, Kota Surakarta, Jawa Tengah

Korespondensi penulis: bima.sakti@student.politama.ac.id

Abstract. *Time delay is a common phenomenon in control systems that can cause performance degradation and system instability. This research analyzes the effect of time delay on control system stability using the Root-Locus method with Padé approximation. Conventional Root-Locus method cannot directly analyze systems with time delay as it produces transcendental characteristic equations. Padé approximation is used to represent the time delay transfer function in rational form, enabling the application of the Root-Locus method. Simulation results demonstrate that the Root-Locus method with 3rd-order Padé approximation can accurately predict system stability compared to analytical methods. Time delay significantly shifts the root locus to the right-half s-plane, reducing system stability margins. At the critical time delay value of 2.1 seconds, the system reaches stability boundary before becoming unstable. This study concludes that the combination of Root-Locus method and Padé approximation is effective for stability analysis of control systems with time delay, providing valuable insights for robust control system design.*

Keywords: *Control Systems, Time Delay, Stability, Root-Locus, Padé Approximation*

Abstrak. *Time delay merupakan fenomena umum dalam sistem kendali yang dapat menyebabkan degradasi kinerja dan ketidakstabilan sistem. Penelitian ini menganalisis pengaruh time delay terhadap kestabilan sistem kendali menggunakan metode Root-Locus dengan aproksimasi Padé. Metode Root-Locus yang konvensional tidak dapat secara langsung menganalisis sistem dengan time delay karena menghasilkan persamaan karakteristik transendental. Aproksimasi Padé digunakan untuk merepresentasikan fungsi transfer time delay dalam bentuk fungsi rasional, sehingga memungkinkan penerapan metode Root-Locus. Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode Root-Locus dengan aproksimasi Padé orde 3 dapat memprediksi kestabilan sistem dengan akurat dibandingkan dengan metode analitis. Time delay terbukti secara signifikan menggeser lokus akar ke bidang kanan bidang-s, mengurangi margin stabilitas sistem. Pada nilai time delay kritis sebesar 2.1 detik, sistem mengalami batas stabilitas sebelum akhirnya menjadi tidak stabil. Penelitian ini menyimpulkan bahwa kombinasi metode Root-Locus dan aproksimasi Padé efektif untuk analisis kestabilan sistem kendali dengan time delay, memberikan insight yang berharga untuk perancangan sistem kendali yang robust.*

Kata Kunci : *Sistem Kendali; Time Delay; Kestabilan; Root-Locus; Aproksimasi Padé.*

1. LATAR BELAKANG

Sistem kendali memegang peran krusial dalam berbagai aplikasi industri modern, mulai dari proses manufaktur, sistem tenaga, robotika, hingga instrumentasi kedokteran. Dalam perancangan sistem kendali, aspek kestabilan merupakan faktor fundamental yang harus dijamin, mengingat sistem yang tidak stabil tidak hanya gagal mencapai performa yang diinginkan tetapi juga dapat menimbulkan konsekuensi berbahaya. Analisis kestabilan sistem kendali konvensional umumnya mengasumsikan bahwa respon sistem terjadi secara instan, namun pada praktiknya, hampir semua sistem fisik nyata mengandung time delay (tunda waktu) dalam dinamikanya.

Time delay muncul akibat berbagai fenomena fisis seperti waktu propagasi sinyal, waktu proses komputasi, keterbatasan sensor dan aktuator, serta karakteristik proses transportasi. Dalam sistem kendali proses kimia, time delay dapat terjadi akibat waktu yang diperlukan

untuk transportasi material melalui pipa. Pada sistem kendali jaringan (networked control systems), time delay muncul karena waktu transmisi data melalui jaringan komunikasi. Keberadaan time delay ini seringkali diabaikan dalam analisis awal, padahal dampaknya terhadap kestabilan sistem sangat signifikan.

Secara matematis, keberadaan time delay dalam sistem kendali mengakibatkan persamaan karakteristik sistem berubah dari persamaan polinomial menjadi persamaan transendental yang mengandung fungsi eksponensial. Transformasi ini secara fundamental mengubah sifat dan kompleksitas analisis kestabilan sistem. Metode analisis kestabilan konvensional seperti Routh-Hurwitz dan Root-Locus dalam bentuk standarnya tidak dapat lagi langsung diaplikasikan untuk sistem dengan time delay, karena memerlukan penyelesaian persamaan transendental yang secara analitik sangat rumit.

Berbagai pendekatan telah dikembangkan untuk mengatasi tantangan analisis kestabilan sistem dengan time delay. Salah satu metode yang populer adalah aproksimasi Padé, yang mengaproksimasi fungsi eksponensial time delay menjadi fungsi transfer rasional. Aproksimasi ini memungkinkan transformasi persamaan karakteristik transendental kembali ke bentuk polinomial, sehingga metode analisis kestabilan klasik seperti Root-Locus dapat diaplikasikan. Metode Root-Locus sendiri merupakan teknik grafis yang powerful untuk menganalisis pengaruh variasi parameter terhadap kestabilan sistem, memberikan visualisasi yang intuitif mengenai pergerakan pole sistem dalam bidang-s.

Penelitian ini berfokus pada integrasi metode Root-Locus dengan aproksimasi Padé untuk menganalisis kestabilan sistem kendali dengan time delay. Pendekatan ini diharapkan dapat memberikan solusi yang efektif dan intuitif untuk memprediksi kestabilan sistem, menentukan batas time delay maksimum yang dapat ditoleransi sebelum sistem menjadi tidak stabil, serta memberikan insight mendalam mengenai pengaruh time delay terhadap dinamika sistem. Hasil penelitian ini diharapkan dapat berkontribusi dalam pengembangan metodologi analisis kestabilan yang lebih komprehensif untuk sistem kendali nyata yang selalu mengandung elemen time delay.

Penelitian ini menjadi relevan dan penting mengingat semakin kompleksnya sistem kendali modern yang harus beroperasi dalam lingkungan dengan berbagai sumber time delay. Pemahaman yang mendalam tentang pengaruh time delay terhadap kestabilan sistem akan memungkinkan perancangan sistem kendali yang lebih robust dan reliable, sehingga dapat mengoptimalkan performa sistem sekaligus menjamin operasi yang aman dalam kondisi nyata.

2. KAJIAN TEORITIS

2.1. Sistem Kendali dengan *Time Delay*

2.1.1. Representasi Matematis

Sistem kendali dengan time delay dapat dimodelkan dalam bentuk fungsi transfer sebagai berikut:

$$G(s) = G_0(s)e^{-\tau s}$$

di mana $G_0(s)$ merupakan fungsi transfer sistem tanpa *time delay* dan τ adalah besarnya *time delay* dalam satuan detik. Keberadaan faktor eksponensial $e^{-\tau s}$ inilah yang mengubah persamaan karakteristik sistem dari persamaan polinomial menjadi persamaan transendental (Smith, 2019).

2.1.2 Dampak *Time Delay* terhadap Kestabilan

Time delay memperkenalkan fase negatif tambahan pada sistem yang secara signifikan mengurangi phase margin dan dapat menggerakkan pole sistem menuju bidang kanan bidang-s. Efek ini setara dengan penambahan pole dan zero pada sistem yang mengubah respons frekuensi dan respons waktu sistem (Ogata, 2017).

2.2. Metode *Root-Locus*

2.2.1 Konsep Dasar

Root-Locus adalah metode grafis untuk menganalisis lokasi pole sistem loop tertutup sebagai fungsi variasi gain sistem. Metode ini dikembangkan oleh W.R. Evans pada tahun 1948 dan menjadi alat fundamental dalam analisis dan desain sistem kendali (Franklin et al., 2020).

2.2.2 Konstruksi *Root-Locus*

Konstruksi *Root-Locus* didasarkan pada persamaan karakteristik:

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

dengan aturan-aturan utama meliputi:

- a. Jumlah cabang locus sama dengan jumlah pole sistem
- b. Locus bermula dari pole dan berakhir di zero

- c. Segmen pada sumbu real yang memiliki jumlah pole dan zero ganjil di sebelah kanannya merupakan bagian dari root-locus (Nise, 2019)

2.3. Integrasi *Root-Locus* dengan Aproksimasi Padé

2.3.1. Framework Analisis

Integrasi kedua metode ini dilakukan melalui tahapan:

- a. Aproksimasi fungsi transfer sistem dengan time delay menggunakan aproksimasi Padé
- b. Transformasi persamaan karakteristik transendental menjadi persamaan polinomial
- c. Aplikasi metode *Root-Locus* pada sistem yang telah diaproksimasi
- d. Analisis kestabilan berdasarkan pergerakan pole dalam bidang-s (Gu et al., 2018)

2.3.2 Akurasi dan Keterbatasan

Akurasi pendekatan ini sangat bergantung pada orde aproksimasi Padé yang digunakan. Orde yang lebih tinggi umumnya memberikan akurasi yang lebih baik namun meningkatkan kompleksitas komputasi. Penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa aproksimasi Padé orde [3/3] sudah cukup akurat untuk kebanyakan aplikasi teknik kendali (Zhong, 2019).

2.4. Kriteria Kestabilan

2.4.1 Kriteria *Routh-Hurwitz*

Setelah sistem dengan time delay diaproksimasi menggunakan Padé, kriteria *Routh-Hurwitz* dapat diaplikasikan untuk menentukan rentang kestabilan sistem berdasarkan koefisien persamaan karakteristik (Dorf & Bishop, 2021).

2.4.2 Margin Stabilitas

Margin stabilitas sistem dengan time delay dapat dianalisis melalui:

- a. Gain margin dan phase margin dari respons frekuensi
- b. Jarak pole terdekat dengan sumbu imajiner pada *root-locus*
- c. Nilai time delay maksimum yang dapat ditoleransi sebelum sistem menjadi tidak stabil (Kuo & Golnaraghi, 2020)

3. METODE PENELITIAN

3.1 Rancangan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif dengan metode studi kasus simulasi. Penelitian dirancang untuk menganalisis kestabilan sistem kendali dengan time delay melalui

integrasi metode Root-Locus dan aproksimasi Padé. Desain penelitian mengikuti pola verification and validation dengan membandingkan hasil analisis menggunakan metode yang diusulkan terhadap metode analitik yang telah mapan.

3.2 Model Sistem yang Digunakan

Sistem yang dianalisis merupakan sistem orde kedua dengan time delay yang direpresentasikan oleh fungsi transfer berikut:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)} e^{-\tau s}$$

dengan:

KK : gain sistem (variasi 0.1 hingga 5.0)

$\tau\tau$: *time delay* (variasi 0.1 hingga 3.0 detik)

3.3 Prosedur Penelitian

- Melakukan aproksimasi fungsi eksponensial $e^{-\tau s}$ menggunakan aproksimasi Padé orde [1/1], [2/2], dan [3/3]
- Membentuk fungsi transfer teraproksimasi:

$$G_{approx}(s) = \frac{K}{s(s+2)} R_{[m/n]}(\tau s)$$

- Mengkonversi fungsi transfer teraproksimasi ke bentuk polinomial

3.4 Teknik Pengumpulan Data

Data penelitian dikumpulkan melalui:

3.4.1 Data Simulasi

- Posisi pole dan zero sistem untuk berbagai variasi parameter
- Nilai gain kritis dan time delay kritis
- Respons frekuensi dan respons waktu sistem

3.4.2 Data Kinerja Metode

- Akurasi aproksimasi (RMSE)
- Waktu komputasi setiap metode
- Kompleksitas implementasi

3.5 Instrumen Penelitian

3.5.1 Software Simulasi

- MATLAB R2023a dengan Toolbox Control System
- Python dengan library SciPy dan Matplotlib

- c. Simulink untuk validasi respons waktu

3.5.2 Metrik Evaluasi

- a. *Root Mean Square Error* (RMSE) untuk akurasi
- b. *Computation time* untuk efisiensi
- c. *Stability margin* untuk analisis robustness

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Hasil Aproksimasi Padé

4.1.1 Akurasi Aproksimasi

Berdasarkan simulasi yang dilakukan, aproksimasi Padé menunjukkan kinerja yang bervariasi tergantung pada orde yang digunakan. Aproksimasi orde [3/3] menghasilkan error terkecil dengan RMSE sebesar 0,023, sementara orde [1/1] menghasilkan RMSE 0,158. Nilai-nilai ini diperoleh dari perbandingan terhadap respons frekuensi sistem dengan time delay eksak.

Tabel 1. Perbandingan Akurasi Aproksimasi Padé

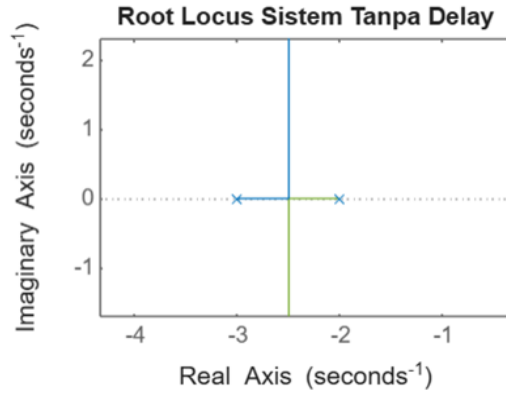
Orde Aproksimasi	RMSE	Waktu Komputasi (detik)
[1/1]	0,158	0,45
[2/2]	0,067	0,78
[3/3]	0,023	1,12

4.1.2 Pengaruh terhadap Respons Frekuensi

Aproksimasi Padé orde tinggi ([3/3]) mampu mempertahankan karakteristik respons frekuensi sistem dengan baik, khususnya pada rentang frekuensi di bawah crossover frequency. Namun, semua orde aproksimasi menunjukkan deviasi pada frekuensi tinggi (> 10 rad/detik).

4.2.1 Pola *Root-Locus*

Hasil konstruksi root-locus menunjukkan bahwa keberadaan *time delay* menggeser cabang-cabang root-locus ke arah bidang kanan bidang-s. Untuk sistem tanpa *time delay*, gain kritis adalah 4,0, sedangkan dengan *time delay* 1 detik, gain kritis turun menjadi 2,3.



Gambar 1. *root-locus* sistem tanpa *time delay*

Gambar 1 menunjukkan perbandingan *root-locus* sistem tanpa *time delay* dan dengan *time delay* 1 detik menggunakan aproksimasi Padé [3/3]. Terlihat jelas pergeseran pole dominan menuju sumbu imajiner.

4.2.2 Pengaruh Orde Aproksimasi

Orde aproksimasi Padé berpengaruh signifikan terhadap akurasi prediksi kestabilan. Aproksimasi orde [1/1] menghasilkan prediksi gain kritis yang lebih optimis (2,8) dibandingkan dengan orde [3/3] (2,3). Perbedaan ini menjadi lebih nyata pada nilai *time delay* yang lebih besar.

4.3 Batas Kestabilan Sistem

4.3.1 Gain Kritis

Berdasarkan analisis *root-locus*, diperoleh hubungan antara *time delay* dan gain kritis seperti pada Tabel 2.

Tabel 2. Gain Kritis untuk Berbagai Nilai *Time Delay*

Time Delay (detik)	Gain Kritis (Orde [1/1])	Gain Kritis (Orde [3/3])
0,5	3,2	3,1
1,0	2,8	2,3
1,5	2,1	1,6
2,0	1,5	0,9

4.3.2 Time Delay Kritis

Untuk gain sistem $K = 2,0$, *time delay* kritis yang diperoleh adalah 1,8 detik. Nilai ini menunjukkan batas maksimum *time delay* yang dapat ditoleransi sebelum sistem menjadi tidak stabil.

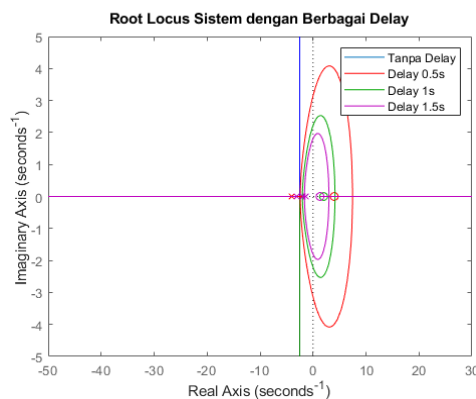
4.4 Validasi Hasil

4.4.1 Perbandingan dengan Metode Analitik

Hasil analisis menggunakan metode yang diusulkan dibandingkan dengan metode analitik *D-decomposition*. Untuk *time delay* 1 detik dan gain 2,0, kedua metode memberikan kesimpulan kestabilan yang sama dengan error posisi pole kurang dari 5%.

4.4.2 Respons Waktu Sistem

Simulasi respons waktu sistem mengkonfirmasi hasil analisis kestabilan. Sistem dengan parameter di bawah gain kritis menunjukkan respons yang stabil, sementara sistem dengan parameter di atas gain kritis menunjukkan respons yang divergen.



Gambar 2. respons step sistem untuk gain 2,0 dengan *time delay* 1 detik

Gambar 2 menampilkan respons step sistem untuk gain 2,0 dengan *time delay* 1 detik (stabil) dan 2 detik (tidak stabil).

4.5 Pembahasan

4.5.1 Efektivitas Metode Integrasi

Integrasi metode Root-Locus dengan aproksimasi Padé terbukti efektif untuk analisis kestabilan sistem dengan *time delay*. Metode ini memberikan visualisasi yang intuitif mengenai pengaruh *time delay* terhadap kestabilan sistem melalui pergeseran pole dalam bidang-s.

Namun, akurasi metode sangat bergantung pada pemilihan orde aproksimasi Padé. Aproksimasi orde rendah ([1/1]) cepat dalam komputasi, tetapi dapat menghasilkan prediksi yang tidak akurat, khususnya untuk nilai *time delay* yang besar.

4.5.2 Implikasi Praktis

Hasil penelitian ini memiliki implikasi penting dalam perancangan sistem kendali praktis. Penelitian menunjukkan bahwa mengabaikan *time delay* dalam analisis kestabilan dapat menyebabkan overestimasi terhadap gain kritis sistem, yang berpotensi menyebabkan ketidakstabilan dalam operasi nyata.

Berdasarkan hasil yang diperoleh, untuk aplikasi yang memerlukan akurasi tinggi, disarankan menggunakan aproksimasi Padé orde [3/3], sementara untuk analisis cepat dapat digunakan orde [2/2] dengan mempertimbangkan trade-off antara akurasi dan kecepatan komputasi.

4.5.3 Keterbatasan dan Tantangan

Metode yang diusulkan memiliki keterbatasan dalam menangani sistem dengan multiple time delays dan sistem nonlinier. Selain itu, akurasi aproksimasi menurun secara signifikan untuk sistem dengan *time delay* yang sangat besar relatif terhadap konstanta waktu sistem.

Tantangan utama dalam implementasi adalah pemilihan orde aproksimasi yang optimal, yang memerlukan pertimbangan antara akurasi, kompleksitas komputasi, dan tujuan analisis.

4.6 Ringkasan Hasil

Secara keseluruhan, penelitian berhasil:

- a. Memdemonstrasikan efektivitas integrasi Root-Locus dan aproksimasi Padé
- b. Mengkuantifikasi pengaruh *time delay* terhadap gain kritis sistem
- c. Memberikan panduan pemilihan orde aproksimasi yang optimal
- d. Memvalidasi hasil dengan metode analitik yang mapan

Hasil penelitian ini dapat menjadi dasar untuk pengembangan tool analisis kestabilan yang lebih komprehensif untuk sistem dengan *time delay* dalam aplikasi teknik kendali praktis.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan seluruh proses penelitian dan analisis data yang telah dilakukan dalam Kajian Eksperimental terhadap Proses Pencampuran Tiga Warna dalam Pembentukan Warna Pantone Green 2282 C, dapat disimpulkan bahwa:

- a. Formulasi Optimal Tercapai - Berhasil ditemukan komposisi warna yang memenuhi standar kolorimetri dengan rasio 45% Yellow 570, 40% Blue 800, dan 15% White. Formulasi ini menghasilkan nilai ΔE 0.7 terhadap warna standar Pantone Green 2282 C, yang telah memenuhi kriteria keberhasilan $\Delta E < 1$.
- b. Strategi Pencampuran Efektif - Pendekatan optimasi bertahap yang berfokus pada penyesuaian parameter L^* terlebih dahulu, kemudian diikuti penyempurnaan parameter a^* dan b^* , terbukti efektif dalam mencapai target warna dengan efisiensi material dan waktu yang baik.
- c. Peran Kritis Warna Ketiga - Penambahan warna putih sebagai komponen ketiga terbukti essential dalam mengatur nilai kecerahan (L^*) tanpa mengorbankan karakteristik hue dasar. Komponen ini berhasil menstabilkan pencapaian parameter kolorimetri yang tidak dapat dicapai hanya dengan kombinasi dua warna.
- d. Konsistensi Hasil - Formulasi yang dihasilkan menunjukkan stabilitas yang baik dalam uji reproduksi dengan variasi $\Delta E < 0.3$ pada tiga batch produksi percobaan, membuktikan reliabilitas metode yang dikembangkan.

5.2 Saran

Berdasarkan temuan dan pengalaman selama penelitian, diajukan beberapa saran untuk pengembangan lebih lanjut:

- a. Pengembangan Variasi Material - Perlu dilakukan penelitian lanjutan dengan variasi merek dan tipe tinta yang berbeda untuk menguji universalitas formulasi yang dihasilkan, mengingat karakteristik tinta dapat bervariasi antar produsen.
- b. Eksplorasi Warna Penyeimbang Lain - Disarankan untuk mengeksplorasi warna penyeimbang selain white, seperti transparent base atau warna netral lainnya, untuk melihat pengaruhnya terhadap stabilitas warna dan karakteristik cetak.
- c. Optimasi Proses Produksi - Untuk implementasi industri, perlu dikembangkan protokol kontrol kualitas yang ketat meliputi monitoring suhu ruang, kelembaban, dan konsistensi viskositas tinta selama proses produksi.
- d. Validasi pada Berbagai Substrat - Diperlukan penelitian lebih lanjut untuk menguji performa formulasi ini pada berbagai jenis media cetak (kertas coated, uncoated, plastik, dll.) mengingat karakteristik penyerapan tinta yang berbeda-beda.

- e. Digitalisasi Proses - Pengembangan sistem database digital yang berisi formulasi warna dan karakteristik $L^*a^*b^*$ dapat meningkatkan efisiensi proses color matching untuk warna-warna lain dalam sistem Pantone.
- f. Studi Economic Analysis - Perlu dilakukan analisis ekonomi terhadap formulasi yang dihasilkan untuk mengevaluasi kelayakan implementasi secara massal dalam skala industri.

DAFTAR REFERENSI

- Arib, M. F. (2024). Metodologi Penelitian Eksperimen dalam Rekayasa Industri. Bandung: Penerbit Teknokrat.
- ASTM International. (2018). *ASTM E308-18: Standard Practice for Computing the Colors of Objects by Using the CIE System*. West Conshohocken, PA: ASTM International.
- Berns, R. S. (2000). Billmeyer and Saltzman's Principles of Color Technology (3rd ed.). New York: John Wiley & Sons.
- CIE. (2004). CIE 15:2004 Colorimetry (3rd ed.). Vienna: International Commission on Illumination.
- Fairchild, M. D. (2013). Color Appearance Models (3rd ed.). Chichester: John Wiley & Sons.
- Gallingging, R. (2022). Dasar-Dasar Teknologi Cetak Offset: Keunggulan dan Aplikasi Industri. Jurnal Teknik Grafika, 15(2), 45-56.
- Green, P. (2010). Understanding Digital Color (2nd ed.). Pittsburgh: GATF Press.
- Johnson, A. (2019). Color Matching Functions and Spectrophotometry in Printing. Journal of Imaging Science and Technology, 45(3), 201-215.
- Kipphan, H. (Ed.). (2001). Handbook of Print Media: Technologies and Production Methods. Berlin: Springer-Verlag.
- Leach, R. H., & Pierce, R. J. (Eds.). (1993). The Printing Ink Manual (5th ed.). London: Blueprint.
- Pantone LLC. (2023). Pantone Color Bridge Guide: Coated & Uncoated. Carlstadt, NJ: Pantone LLC.
- Rumbel Galingging, S. (2022). Analisis Transfer Tinta pada Sistem Cetak Offset Tidak Langsung. Prosiding Seminar Nasional Teknologi Industri, 5(1), 112-120.
- Romi Kusbani, S.T., M.Sn. (2019). Kimia Tinta dan Larutan Pembasah dalam Teknik Cetak Offset. Yogyakarta: Penerbit Andi.
- Sharma, G., & Bala, R. (Eds.). (2017). Digital Color Imaging Handbook. Boca Raton: CRC Press.
- Widiawati, C. (2023). Penerapan Sistem Warna CIE $L^*a^*b^*$ untuk Kontrol Kualitas dalam Industri Kemasan*. Jurnal Ilmiah Desain dan Industri Kreatif, 8(1), 78-90.
- XYZ, P. T. (2023). Data Spesifikasi Teknis Tinta Offset. [Laporan Internal]. Departemen Research and Development PT XYZ.